Universidad Nacional de La Plata – Facultad de Ciencias Exactas
Análisis Matemático II (CIBEX) – 1er Sem 2022

Segundo Parcial – Primera Fecha
01/07/2022

Apellido y Nombre [redacted] ....

Comisión [redacted] .... [redacted] *al*[redacted] ...

1. (a) Sea $f(x, y) = x + y$ continua y definida en todo R^2, y sea D el disco centrado en el origen, de radio $\sqrt{3}$. Dibujar D y expresar esta región como conjunto en coordenadas cartesianas y en coordenadas polares. La integral doble $\iint_D f(x, y)\, dA$, ¿qué valor toma?
Si se restringe el dominio de integración al primer cuadrante, hallar el valor de la integral doble de f, y dar una interpretación del resultado (realizar un dibujo en R^3 que corresponda a su interpretación).

   (b) La masa de un objeto esférico hecho con madera de pino, está dada por la integral triple: $\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} 5\rho^4 \sin^3(\phi)\cos^2(\theta)\, d\rho\, d\phi\, d\theta$, en gramos. Resolver la integral.
Dibujar el objeto. Dar una expresión para la densidad volumétrica de masa, en coordenadas cartesianas. ¿Por dónde estima que estaría ubicado aproximadamente el centro de masa?

2. (a) Sea $C \subset R^2$ la curva borde de la región del primer cuadrante delimitada por: $y = x^3$, $y = 0$, $x = 1$. Parametrizar y graficar C indicando el sentido inducido por la parametrización propuesta. La integral $\oint_C [x^2 e^y\, dx + xy\, dy]$, ¿depende de la parametrización?; ¿y del sentido de recorrido de la curva?; ¿por qué?
Resolver la integral desarrollando primero todos los términos que la forman e indicando justificadamente cuáles de dichos términos son idénticamente nulos.

   (b) Sea S la superficie gráfica de la función $f(x, y) = 4 - x^2$. Mediante una integral de superficie calcular el área de la porción de S que se encuentra sobre la región D del plano XY deter-
minada por $0 \leq x \leq 4$, $0 \leq y \leq 8x$. Efectuar un gráfico aproximado de la superficie S y de la región D. Justificar todos los procedimientos.

3. (a) Considerar el campo vectorial en R^3 dado por $\vec{F}(x, y, z) = ze^x\, \breve{i} + e^z\, \breve{j} + (e^x + ye^z)\, \breve{k}$, y sea $C_1 \subset R^3$ la curva paramétrica dada por la función vectorial $\vec{r}(t) = (e^t, te^t, t)$ con $t \in [0, 1]$.
La integral $\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, ¿es independiente de la trayectoria?; ¿por qué?
Sea C_2 una curva suave y cerrada en R^3. ¿Cuál es el valor de $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$? Responder justificando.

   (b) Si el campo del inciso (a) es un campo de fuerzas, ¿cuánto trabajo realiza para desplazar una partícula a lo largo de C_1? ¿Y a lo largo de C_2? ¿Por qué? Justificar todos los procedimientos.

4. (a) Sea C la curva determinada por la intersección de las superficies: $z = 2 - y$, $x^2 + y^2 = 1$, con sentido antihorario visto desde arriba, y sea $\vec{F}(x, y, z) = z\,\breve{i} + x\,\breve{j} + y\,\breve{k}$ un campo vectorial de R^3 en V_3. Para obtener el valor de la circulación de $\vec{F}$ a lo largo de C, $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, ¿es posible utilizar otro tipo de integral? En caso de que la respuesta sea afirmativa enunciar el teorema o propiedad y, verificando sus hipótesis, utilizarlo para hallar el valor de dicha circulación.

   (b) Sea R una región del plano XY encerrada por una curva C simple, cerrada y suave a trozos, con sentido antihorario. Demostrar justificadamente que $\frac{1}{4}\oint_C [-3y\, dx + x\, dy]$ es igual al valor del área de la región R.

1b) $\operatorname{sen}^3\theta = \operatorname{sen}\theta \cdot \operatorname{sen}^2\theta$ $\quad \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$

$\operatorname{sen}^2\theta = 1 - \cos^2\theta$